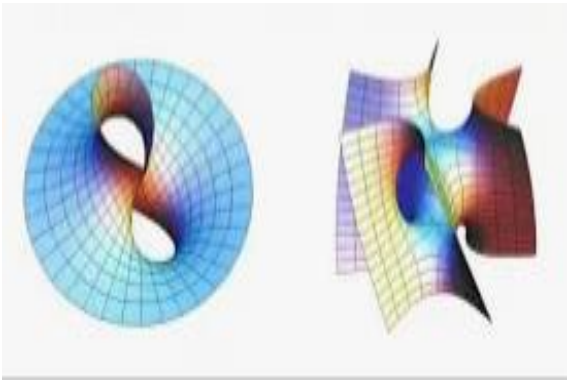
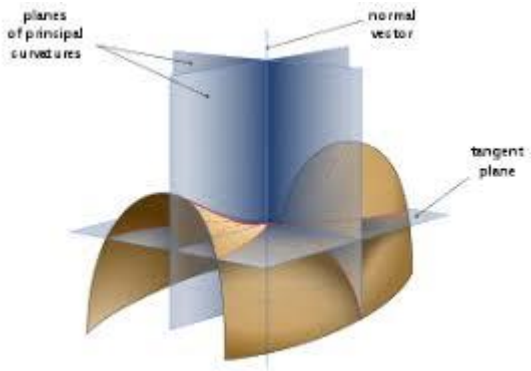
UNIDAD 2: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

INTRODUCCIÓN:

La asignatura de Cálculo de Varias Variables para su formación profesional de ingeniería, estudia temas como las Integrales Múltiples (integrales dobles e integrales triples), Geometría Diferencial (curvas y superficies), las Integrales de Línea y de Superficie.

Para una mejor comprensión de estos temas indicados es necesario poseer un conocimiento, de la teoría de funciones de varias variables. Para trabajar con los dominios de este tipo de funciones necesitaremos una pequeña iniciación a la topología del espacio euclídeo que nos permita conocer los conceptos de conjunto abierto, conjunto cerrado, interior de un conjunto. También serán muy frecuentes derivar funciones de varias variables.

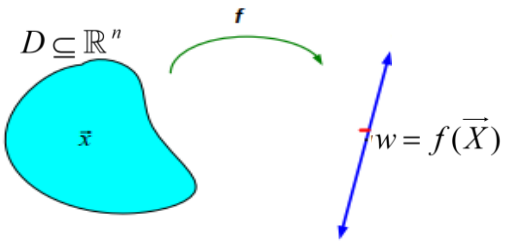
SUPERFICIES	PLANOS PRINCIPALES
	

1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES:

1.1. Definición: (Función de Varias Variables) Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, Si a cada $\vec{X} \in D$ le corresponde un punto $w = f(\vec{X})$**,** entonces se define.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\vec{X} \to w = f(\vec{X})$$

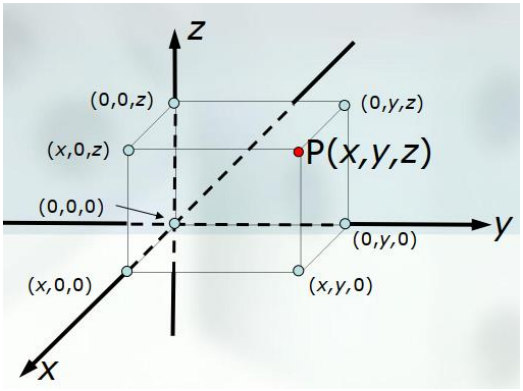
Donde $\vec{X} = (x_1; x_2; ...; x_n)$

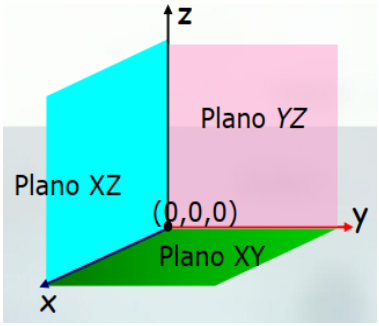
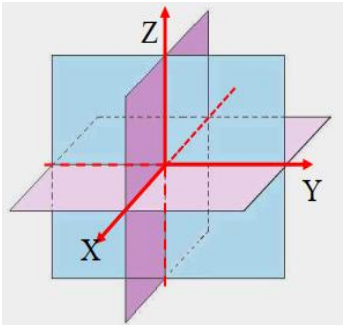
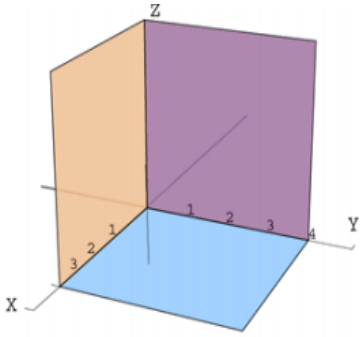


$$Dom(f) = \left\{ \vec{X} \in D \subseteq \mathbb{R}^n / \exists w \in \mathbb{R} \wedge w = f(\vec{X}) \right\}$$

$$Ran(f) = \left\{ w = f(\vec{X}) \in \mathbb{R} / \vec{X} \in Dom(f) \right\}$$

1.2. El Espacio Tridimensional: El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, recibe el nombre de Espacio Tridimensional, denotado por $\mathbb{R}^3$. Cada terna ordenada $(x; y; z)$ se denomina punto del espacio tridimensional**.**



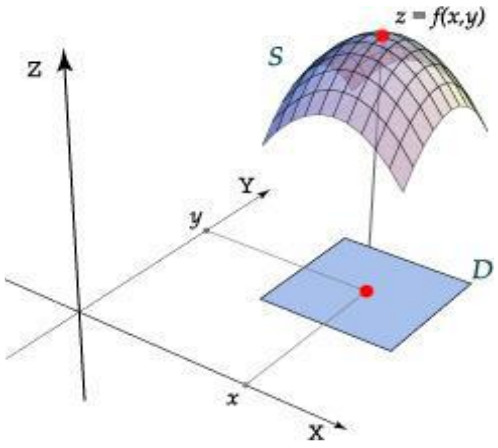
Ejes Coordenados y Planos Coordenados:	Los Octantes en $\mathbb{R}^3$	El Primer Octante en $\mathbb{R}^3$
		

1.3. Definición: (Función de dos Variables) Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada $(x;y)$ en D le corresponde un punto $z=f(x;y)$, entonces f es una función de x e y.

En una función dada por:

$$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x;y)\to z=f(x;y)$$

Donde $z=f(x;y)$ se tiene que:
x e y : Son las variables independientes
z : Es la variable dependiente.



***) Dominio de una Función de dos Variables:**

$$Dom(f)=\{(x;y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2 / \exists z\in\mathbb{R}\wedge z=f(x;y)\}$$

***) Rango de una Función de dos Variables:**

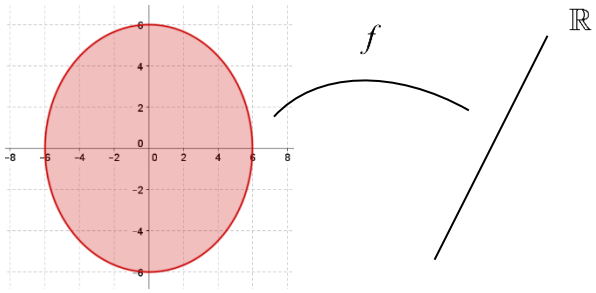
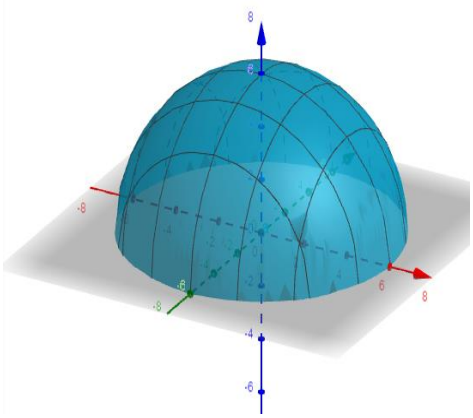
$$Ran(f)=\{z=f(x;y)\in\mathbb{R} / (x;y)\in Dom(f)\}$$

***) Gráfica de una Función de dos Variables (Superficie):**

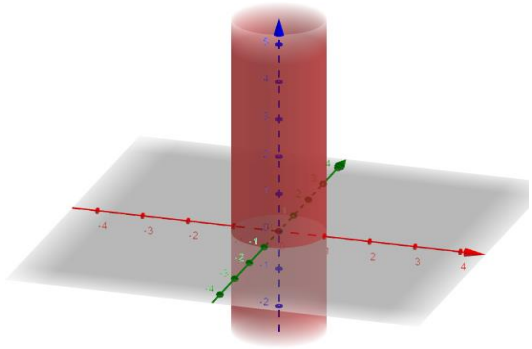
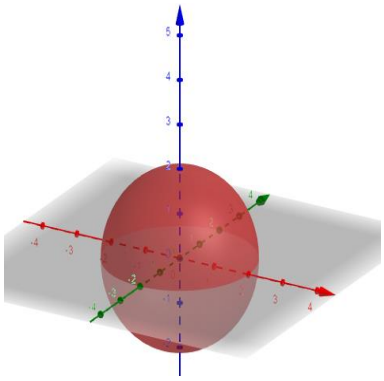
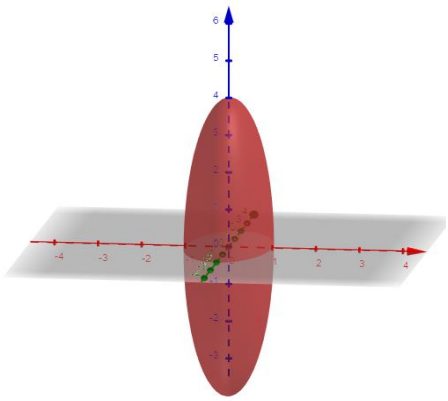
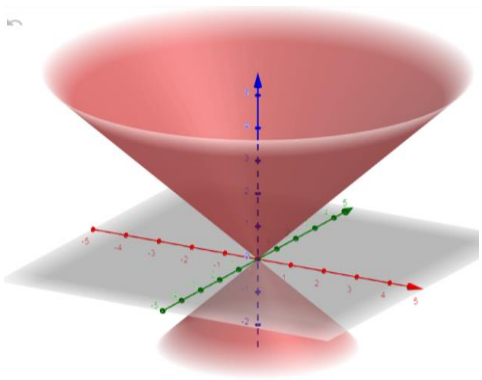
$$gra(f)=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / (x;y)\in D\ ,\ z=f(x;y)\}$$

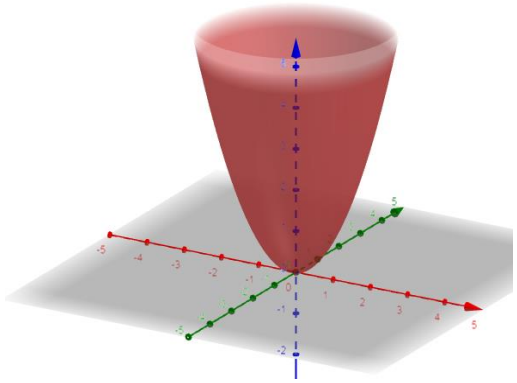
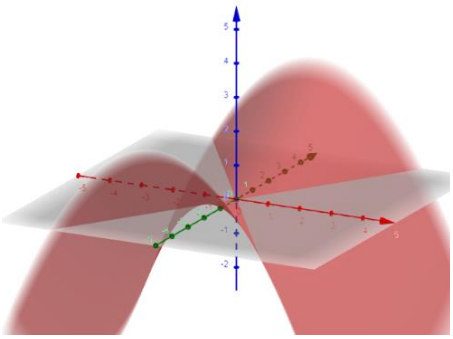
Ejemplo 01: Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definido por: $f(x,y)=\sqrt{36-x^2-y^2}$ Determine su dominio y grafique la función dada.

Solución:

Dominio de la función	Gráfico de la función
$Dom(f)=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / 36-x^2-y^2\geq 0\}$ $=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 36\}$ 	

Ejemplo 02: Graficar con Geogebra las siguientes funciones.

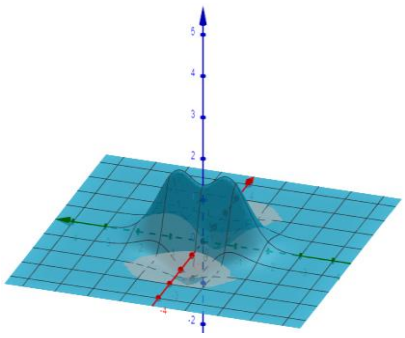
Cilindro: $x^2+y^2=1$	**Esfera:** $x^2+y^2+z^2=4$
	
Elipsoide: $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$	**Cono:** $x^2+y^2=z^2$
	

Paraboloide: $z = x^2 + y^2$	**Paraboloide Hiperbólico:** $z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4}$
	 Silla de Montar

Ejemplo 03: Graficar con Geogebra la siguiente función: $f(x;y) = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}$

Solución:

Se determina $Dom(f) = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

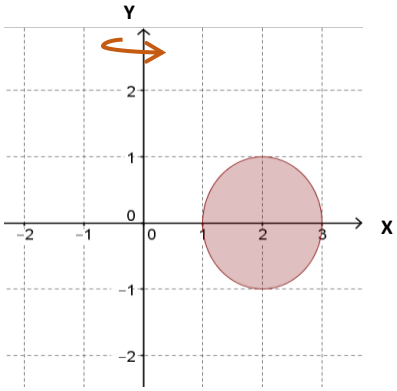


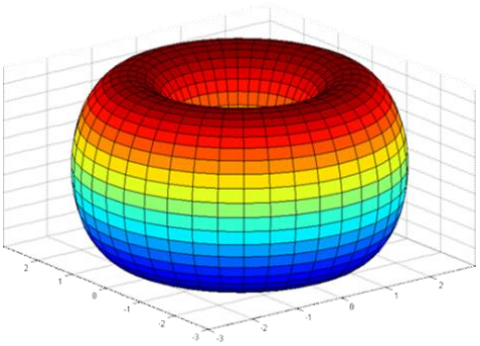
1.4. El Toro: Superficie de revolución es generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior coplanaria (en su plano y que no la corta) la superficie tridimensional que resulta de hacer girar una circunferencia alrededor de un eje.
https://www.geogebra.org/m/Fz8xUTMW

Ejemplo 04: la superficie de revolución generada al hacer girar la región encerrada por la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 1,$ alrededor del eje Y

Solución:

Graficamos la circunferencia en el plano cartesiano. Rotamos la circunferencia alrededor del eje Y



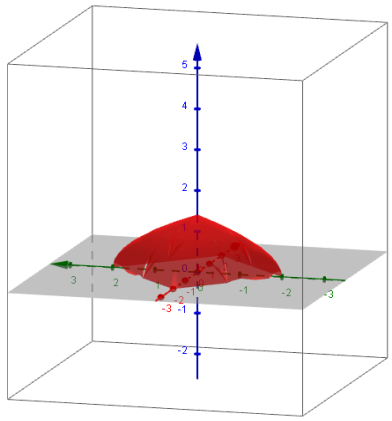
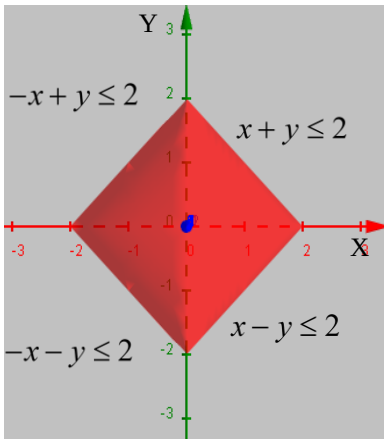


Ejemplo 01: Determine el dominio de la siguiente función $f(x;y)=\sqrt{2-|x|-|y|}$

Solución:

Hacemos: $2-|x|-|y|\geq 0 \Rightarrow |x|+|y|\leq 2$

Redefinimos la función valor absoluto: $|x|+|y|\leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x \Rightarrow x\geq 0 \wedge \begin{cases} y\geq 0 \Rightarrow x+y\leq 2 \\ y<0 \Rightarrow x-y\leq 2 \end{cases} \\ -x \Rightarrow x<0 \wedge \begin{cases} y\geq 0 \Rightarrow -x+y\leq 2 \\ y<0 \Rightarrow -x-y\leq 2 \end{cases} \end{cases}$

Gráfico	Dominio
	

1.5. Operaciones con Funciones: Consideremos dos funciones $f;g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, con dominios $Dom(f)$ y $Dom(g)$, respectivamente, entonces definimos:

***)** $(f\pm g)(\vec{x})=f(\vec{x})\pm g(\vec{x})$; $\forall \vec{x}\in Dom(f\pm g)=Dom(f)\cap Dom(g)$

***)** $(f.g)(\vec{x})=f(\vec{x}).g(\vec{x})$; $\forall \vec{x}\in Dom(f.g)=Dom(f)\cap Dom(g)$

***)** $\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x})=\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$; $\forall \vec{x}\in Dom(f/g)=Dom(f)\cap Dom(g)-\{\vec{x}/g(\vec{x})=(0)\}$

Ejemplo 02: Determine el dominio y grafique la función $h(x;y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

Solución:

Por álgebra de funciones:

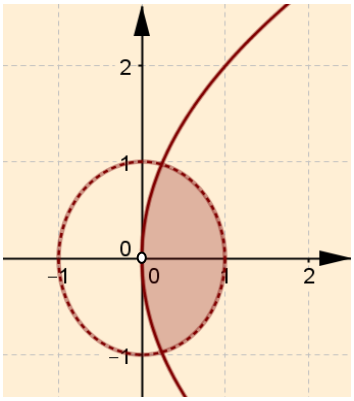
$\forall \vec{x}\in Dom(f/g)=Dom(f)\cap Dom(g)-\{\vec{x}/g(\vec{x})=(0)\}$

$(4x-y^2\geq 0) \wedge (1-x^2-y^2>0) \Rightarrow (y^2\leq 4x) \cap (x^2+y^2<1)$

Intersecamos:

$D=\{((x;y)\neq(0;0))\in\mathbb{R}^2/(y^2\leq 4x)\wedge(x^2+y^2<1)\}$

Graficando el dominio:



Ejemplo 03: Determine y grafique el dominio de la función $(f-g)$, definido por

$f(x;y)=\ln(y-2-|x-2|)$ y $g(x;y)=\sqrt{4x-x^2-y^2+12}$

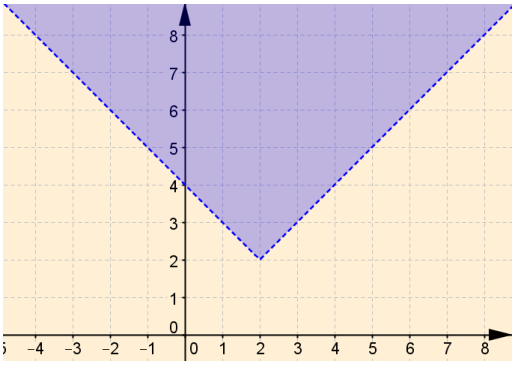
Solución:

*) Determinamos el dominio de $f(x;y)$

$y-2-|x-2|>0$

$y>2+|x-2|$

$$|x-2|=\begin{cases}x-2\ ;\ x\geq 2\\ 2-x\ ;\ x<2\end{cases}$$



En $[2;+\infty\rangle$

$y>2+x-2$

$y>x$

En $\langle-\infty;2\rangle$

$y>2+2-x$

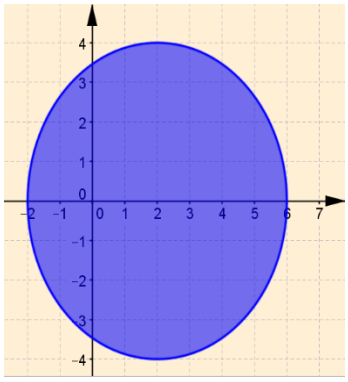
$y>4-x$

*) Determinamos el dominio de $g(x;y)$

$4x-x^2-y^2+12\geq 0$

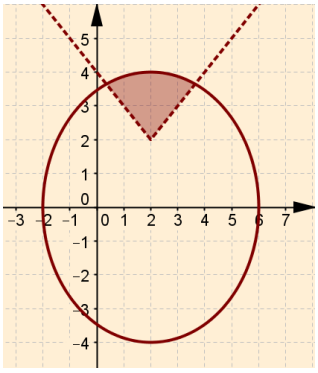
$x^2-4x+4+y^2\leq 12+4$

$(x-2)^2+y^2\leq 16$



*) Determinamos el dominio de $f-g$

$dom(f-g)=dom(f)\cap dom(g)$



$f(x;y)-g(x;y)=\ln(y-2-|x-2|)-\sqrt{4x-x^2-y^2+12}$

Ejemplo 04: Un Ingeniero Mecánico, gerente de la empresa MOTORS GROUP, diseña turbinas para avión modelo A y modelo B. El costo de material y mano de obra por fabricar una turbina modelo A es de $ 6 000 y del modelo B es $ 5 000. Suponga que el ingeniero como empresario tiene costos fijos mensuales de $ 1 200 000.

a) Modele el costo como función de la cantidad de turbinas de cada modelo fabricado mensualmente.

b) Suponga que la empresa vende cada turbina modelo A en $ 10 000 y del modelo B en $ 8 000. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de turbinas de cada modelo fabricadas y vendidas mensualmente.

c) Calcule la utilidad mensual si se vende 100 turbinas modelo A y 50 turbinas modelo B, e interprete.

Solución (a):

x: Número de turbinas modelo A
y: Número de turbinas modelo B

Costo Total (Mensual) = Costos de producción + costos fijos
= 6000 x + 5000 y + 1 200 000

Por tanto: $C(x;y) = 6000x + 5000y + 1200000$ dólares

Solución (b):
Utilidad mensual = Ingreso mensual – costo mensual

$U(x;y) = 10000x + 8000y - (6000x + 5000y + 1200000)$

Por tanto: La utilidad mensual de la empresa es: $U(x;y) = 4000x + 3000y - 1200000$ dólares

Solución (c):
Evaluamos para $x = 100$; $y = 50$ turbinas.

$U(100;50) = 4000(100) + 3000(50) - 1200000 = 400000 + 150000 - 1200000 = -650000$

Por tanto: Se observa que el costo total es mayor que el ingreso, por eso hay pérdidas aún.

Ejemplo 05: Goodyear, es una empresa dedicada a la producción y venta de llantas, en los modelos deportivos y Ron On Flat (ROF). Las variables q_1 y q_2 representan respectivamente las cantidades de llantas deportivas y ROF que se demandan anualmente, y que las variables x e y representan los precios unitarios (en soles) de estos modelos respectivamente. Los precios se relacionan mediante: $\begin{cases} q_1 = 2600 - 4x^2 + 12y^2 \\ q_2 = 3500 + 3x^2 - 32y^2 \end{cases}$

Modele la función de ingreso total, $I(x;y)$

Solución:

Ingreso total = Ingreso (deportivos) + Ingreso (ROF)
Ingreso total = Precio venta (cantidad vendida deportivos) + Precio venta (cantidad vendida ROF)

$I = xq_1 + yq_2$ Reemplazando

$I = x(2600 - 4x^2 + 12y^2) + y(3500 + 3x^2 - 32y^2)$

$= 2600x - 4x^3 + 12xy^2 + 3500y + 3x^2y - 32y^3$

Por tanto: $I(x;y) = 2600x - 4x^3 + 12xy^2 + 3500y + 3x^2y - 32y^3$ anuales

Ejemplo 06: Una empresa fabrica dos modelos de bujías, cuyas demandas son:

$q_1 = 300 - 20p_1 + 300p_2$ (Bujías para autos)

$q_1 = 200 + 40p_1 - 10p_2$ (Bujías para camiones)

Donde p_1 y p_2 representan los precios de venta de cada bujía para auto y camión (respectivamente). En la actualidad el costo de cada bujía para auto es 50 dólares y de camión es 75 dólares por cada una.

a) Defina el ingreso total por la venta de estos dos modelos de bujías, en términos de los precios *p*1 y *p*2.

b) Determine la expresión que permita obtener la utilidad total.

Solución (a):

Ingreso total = Ingreso total (bujías para autos) + Ingreso total (bujías para camiones)

$I = p_1\, q_1 + p_2\, q_2 = p_1(300 - 20p_1 + 300\, p_2) + p_2(200 + 40\, p_1 - 10\, p_2)$

$I = 300p_1 - 20\, {p_1}^2 + 300\, p_1\, p_2 + 200p_2 + 40\, p_1\, p_2 \; - 10\, {p_2}^2$

$I\,(p_1; p_2) = 300p_1 - 20\, {p_1}^2 + 340\, p_1\, p_2 + 200p_2 \; - 10\, {p_2}^2$

Solución (b):

Utilidad = Ingreso total – Costo total

$U = (300p_1 - 20\, {p_1}^2 + 340\, p_1\, p_2 + 200p_2 \; - 10\, {p_2}^2) - (50\, q_1 + 75\, q_2)$

$U = 300p_1 - 20\, {p_1}^2 + 340\, p_1\, p_2 + 200p_2 \; - 10\, {p_2}^2 - (15000 - 1000\, p_1 + 15000\, p_2 +$

$+15000 + 3000\, p_1 - 750\, p_2)$

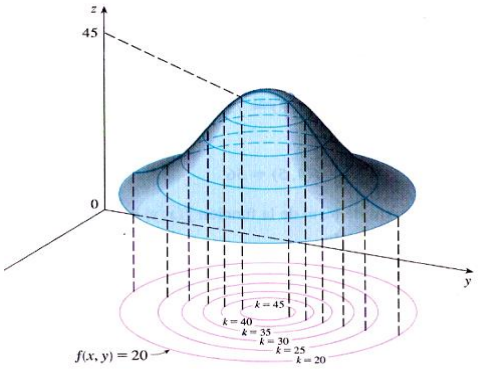
$U\,(p_1\,;\, p_2) = 300p_1 - 20\, {p_1}^2 + 340\, p_1\, p_2 + 200p_2 \; - 10\, {p_2}^2 - 15000 + 1000\, p_1 - 15000\, p_2$

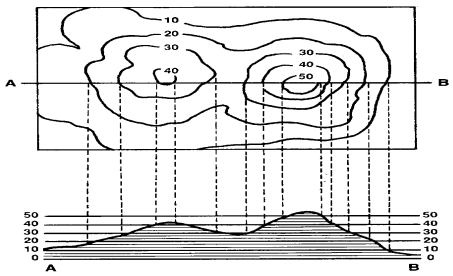
$-15000 - 3000\, p_1 + 750\, p_2)$

Por tanto: $U\,(p_1\,;\, p_2) = -1700p_1 - 20\, {p_1}^2 - 10\, {p_2}^2 + 340\, p_1\, p_2 - 14050p_2 - 30000$

1.6. Observación: Una forma práctica de visualizar la gráfica de una función de dos variables es a través de las curvas de nivel.

Para esto consideremos la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $z = f(x;y)$ cuya gráfica de esta función es una superficie de $\mathbb{R}^3$, entonces las **Curvas de Nivel** se obtienen haciendo $f(x;y) = k$ donde k es una constante.



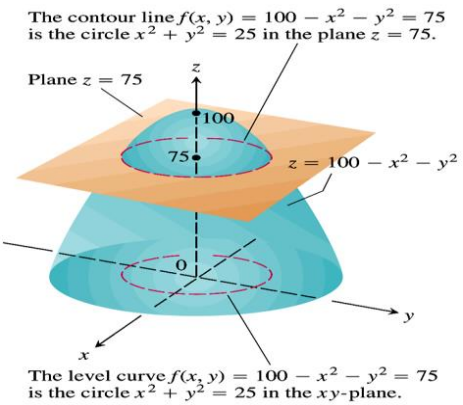


Ejemplo 06: Halle la curva de nivel en la función $f(x;y) = 100 - x^2 - y^2$ para $k = 25$

Solución:

$f(x;y) = 100 - x^2 - y^2 = 25 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 75$

Tenemos $x^2 + y^2 = 75$ Una circunferencia con centro en el origen de radio $r = 5\sqrt{3}$


The contour line f(x, y) = 100 − x² − y² = 75
is the circle x² + y² = 25 in the plane z = 75.
Plane z = 75
z
100
75
z = 100 − x² − y²
0
y
x
The level curve f(x, y) = 100 − x² − y² = 75
is the circle x² + y² = 25 in the xy-plane.

ENTRETENIMIENTO 01

I) Determine el dominio de las siguientes funciones de dos variables, y represéntalos gráficamente en el plano XY :

01) $f(x;y)=\sqrt{25-4y^2-x^2}$

02) $z=\ln(y^2-4x+8)$

03) $z=\sqrt{4-y^2-x^2}$

04) $f(x;y)=\sqrt{4-|x|-y}$

05) $f(x;y)=x\ln(4y^2-x)$

06) $f(x;y)=\dfrac{\ln(x-2y)}{\sqrt{y-2x}}$

07) $f(x;y)=\sqrt{6+2x-3y}$

08) $f(x;y)=\sqrt{2-|x|-|y|}$

09) $f(x;y)=\sqrt{16-4x^2-y^2}$

10) $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

11) $f(x;y)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

12) $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{16-x^2-y^2}}{y}$

13) $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{y-|x|}+4}{\ln\left(\sqrt[4]{8-x^2-y^2}+10\right)}$

14) $f(x;y)=\dfrac{x-1}{(y-1)\sqrt{y-1+x^2}}$

15) $f(x;y)=\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

16) $f(x;y)=\sqrt{\ln(y-2x+1)}$

17) $f(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}+\ln(9-x^2-y^2-z^2)$

18) $f(x;y)=\dfrac{3x+5y}{2x-y}$

19) $f(x;y)=\begin{cases}4-\dfrac{1}{x^2+y^2}\ ;\ 0<x^2+y^2\le 1\\ [\![\ x^2+y^2\ ]\!]\ ;\ 1<x^2+y^2\le 4\\ \sqrt{x^2+y^2-2}\ ;\ 1\le x^2+y^2\end{cases}$

20) $f(x;y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

II) Construya las curvas de nivel de las siguientes funciones:

01. Trazar algunas curvas de nivel de la función $f(x,y)=-x^2-y^2+4$ para $k=-5;0;3$

02. Trazar algunas curvas de nivel de la función $f(x,y)=x^2+2y^2-5$, para $k=-4;-1;1;4$

03. Dada la función $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{xy-y-2x-1}}{3}$, grafique el dominio y la curva de nivel $k=\ln(2)$

III) Resolver los siguientes problemas:

01. Una tienda importadora de motores ofrece motores Toyota y Nissan. Se ha estimado que si se vende el motor Toyota a p_1 miles de dólares y los Nissan a p_2 miles de dólares, la ecuación de demanda de los Toyota está dada por $D_1(p_1;p_2)=300-5p_1+10p_2$ y la ecuación de demanda de laos Nissan dado por $D_2(p_1;p_2)=200+7p_1-5p_2$ al día. Exprese el ingreso diario de la compañía en función de p_1 y p_2.

02. Un Ingeniero Mecánico, gerente de la empresa MOTORS GROUP, diseña turbinas para avión modelo A y modelo B. El costo de material y mano de obra por fabricar una turbina modelo A es de $ 8000 y del modelo B es $ 7000. Suponga que el ingeniero como empresario tiene costos fijos mensuales de $ 1400000.

a) Modele el costo semanal como función de la cantidad de turbinas de cada modelo fabricado mensualmente.
b) Suponga que la empresa vende cada turbina modelo A en $ 10000 y del modelo B en $ 9000. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de turbinas de cada modelo fabricadas y vendidas mensualmente.

03. Una tienda tiene dos tipos de CD. Se ha estimado que si se vende el primer tipo de CD a p_1 y el segundo tipo de CD a p_2 la ecuación de demanda del primer tipo de CD está dada por $D_1(p_1; p_2) = 100 - 5p_1 + 12p_2$ y la ecuación de demanda del segundo tipo de CD está dada por $D_2(p_1; p_2) = 200 + 6p_1 - 10p_2$ unidades a la semana.

a) Modele la función que representa el ingreso total a la semana (I), que depende de p_1 y p_2.

b) Calcule el ingreso total a la semana si el primer tipo de CD se vende a 3 UM y el segundo a 2 UM.

04. Una empresa produce dos tipos de productos X y Y. El costo de material y mano de obra por producir una unidad de X es $ 3 y el de Y es $ 4. Suponga que la empresa tiene costos fijos semanales de $ 1000.
a) Obtenga el costo semanal como función de las unidades de los dos tipos de productos producidas.
b) Si la compañía vende el producto X a 4 UM y el Y a 6 UM. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de unidades producidas y vendidas a la semana.

05. Una empresa produce dos tipos de productos X y Y. El costo de material y mano de obra por producir una unidad de X es $ 4 y el de Y es $ 6. Suponga que la empresa tiene costos fijos semanales de $ 4200.
a) Obtenga el costo semanal como función de las unidades de los dos tipos de productos producidas.
b) Si la compañía vende el producto X a $ 7 y el Y a $ 10. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de unidades producidas y vendidas a la semana.

06. Goodyear, es una empresa dedicada a la producción y venta de llantas, en los modelos deportivos y Ron On Flat (ROF). Las variables q_1 y q_2 representan respectivamente las cantidades de llantas deportivas y ROF que se demandan anualmente, y que las variables x e y representan los precios unitarios (en soles) de estos modelos respectivamente. Los precios se relacionan mediante: $\begin{cases} q_1 = 2600 - 4x^2 + 12y^2 \\ q_2 = 3500 + 3x^2 - 32y^2 \end{cases}$

a) Modele la función de ingreso total, $I(x; y)$
b) Calcule los ingresos anuales si se venden 4000 llantas deportivas y 3000 llantas ROF.

07. Bujía NGK, fabrica 2 tipos de bujías pre calentador y de encendido para autos. El costo de material y mano de obra por fabricar una docena de bujías de pre calentador es $ 80 y el de encendido es $ 60 la docena. Suponga que la empresa tiene costos fijos semanales de $ 12000.
a) Modele el costo semanal como función de la cantidad de docenas de bujías para cada tipo fabricado y vendido a la semana.

b) Suponga que la fábrica vende la docena de bujías pre calentador a $ 100 y el de encendido a $ 80. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de docenas de cada tipo fabricadas y vendidas a la semana.

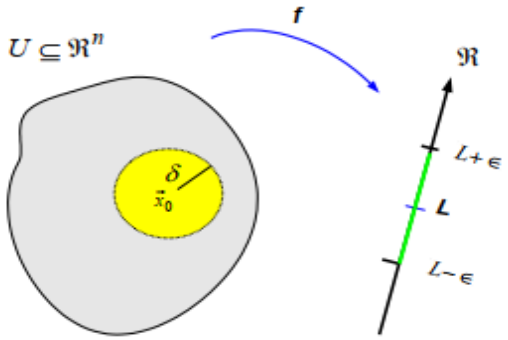
2. LÍMITE DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES:

2.1. Definición 1: Sea $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función de n variables definidas en U y sea $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de U Entonces:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=L \leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0 \text{ Tales que: } \forall\vec{x}\in B(\vec{x_0};\delta)\subset D_f \Rightarrow f(\vec{x})\in B(L;\varepsilon)$$

Donde: $\vec{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$ y $\vec{x}_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$

2.2. Interpretación geométrica:



Nota: Sea $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función definida en D y sea $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de D Entonces:

$$\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y)=L \leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ Tales que: } 0<\left|(x;y)-(a;b)\right|<\delta\Rightarrow\left\| f(x;y)-L\right\|<\varepsilon$$

2.3. Propiedades: Si $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ son funciones tal que $\lim_{x\to A} f(\vec{x})$ y $\lim_{x\to A} g(\vec{x})$ existen y si A es un punto de acumulación de $D_f\cap D_g$ entonces:

1°) $\lim_{x\to A}\left[f(\vec{x})\pm g(\vec{x})\right]=\lim_{x\to A} f(\vec{x})\pm\lim_{x\to A} g(\vec{x})$

2°) $\lim_{x\to A}\left[f(\vec{x}).g(\vec{x})\right]=\left[\lim_{x\to A} f(\vec{x})\right].\left[\lim_{x\to A} g(\vec{x})\right]$

3°) $\lim_{x\to A}\dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}=\dfrac{\lim_{x\to A} f(\vec{x})}{\lim_{x\to A} g(\vec{x})};\ si\ \lim_{x\to A} g(\vec{x})\neq 0$

2.4. Teorema 1: Si la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tiene diferentes límites cuando $(x;y)$ se aproxima a $(x_0;y_0)$ a través de dos conjuntos diferentes que tienen a $(x_0;y_0)$ como punto de acumulación, entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)$ no existe.

Observación: (Regla de las dos Trayectorias)

Sean $f(x;y)$ cuyo dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $P_0 = (x_0;y_0)$ sea un punto de acumulación de D si consideramos las curvas C_1 y C_2 que pasa por P_0 y si se tiene:

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) \neq \lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} g(x;y) \Rightarrow \lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) \nexists$$

Ejemplo 07: Calcule si existe $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Solución:

i) Consideramos $C_1: \ y = m\,x \ ; \ m \neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(m^2x^2)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4m^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2m^2}{1+m^2} = \frac{0}{1+m^2} = 0$$

ii) Consideramos $C_2: \ y = k\,x^2 \ ; k \neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(k^2x^4)}{x^2+k^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6k^2}{x^2(1+k^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4k^2}{1+k^2x^2} = \frac{0}{1+0} = 0$$

iii) Consideramos $C_3: \ x = k\,y^2 \ ; k \neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{k^2y^6}{k^2y^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6k^2}{y^2(k^2y^2+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4k^2}{(k^2y^2+1)} = \frac{0}{(0+1)} = 0$$

Por tanto: 0 es candidato a límite

*) Por definición:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 \ \leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ Tales que: } \ 0 < |(x;y)-(0;0)| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Tenemos:

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta \to |x| < \delta \qquad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta \to |y| < \delta$$

$$|x|^2 < \delta^2 \qquad |y|^2 < \delta^2$$

Ahora:

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = x^2 = |x|^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| < \delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$$ Demostrado por definición.

Por tanto: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$

Ejemplo 08: Determine $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ si existe.

Solución:

i) Consideramos $C_1: \ y = m\,x \ ; \ m \neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-m^4x^4}{x^4+m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4(1-m^4)}{x^4(1+m^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-m^4}{1+m^4}=\frac{1-m^4}{1+m^4}$$

ii) Consideramos $C_2:\ y=kx^2\ ;\ k\neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-k^4x^8}{x^4+k^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4(1-k^4x^4)}{x^4(1+k^4x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-k^4x^4}{1+k^4x^4}=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1}{1}=1$$

iii) Consideramos $C_3:\ x=ky^2\ ;\ k\neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{k^4y^8-y^4}{k^4y^8+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4(k^4y^4-1)}{y^4(k^4y^4+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{k^4y^4-1}{k^4y^4+1}=\frac{0-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

Para diferentes curvas C_i el límite toma diferentes valores

Por tanto: $\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\ \nexists$

Ejemplo 09: Determine $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ Si existe, para $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4xy^2+y^2}{x^2+y^2} & ;\ (x;y)\neq(0;0)\\ 1 & ;\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$

Solución:

i) Consideramos $C_1:\ y=mx$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x(m^2x^2)+m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+4xm^2+m^2)}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+4xm^2+m^2}{1+m^2}$$
$$=\frac{1+m^2}{1+m^2}=1$$

ii) Consideramos $C_2:\ y=kx^2$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x(k^2x^4)+k^2x^4}{x^2+k^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+4x^3k^2+k^2x^2)}{x^2(1+k^2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+4x^3k^2+k^2x^2}{1+k^2x^2}$$
$$=\frac{1}{1}=1$$

iii) Consideramos $C_3:\ x=ky^2$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=\lim_{y\to 0}\frac{k^2y^4+4ky^2(y^2)+y^2}{k^2y^4+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2(k^2y^2+4ky^2+1)}{y^2(k^2y^2+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{k^2y^2+4ky^2+1}{k^2y^2+1}$$
$$=\frac{1}{1}=1$$

Por tanto: 1 es candidato a límite

Por definición:

$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=1 \leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ Tales que: $0<\|(x;y)-(0;0)\|<\delta \Rightarrow \left|\dfrac{x^2+4xy^2+y^2}{x^2+y^2}-1\right|<\varepsilon$

Tenemos:

$|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta\to|x|<\delta$ $\qquad$ $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta\to|y|<\delta$

$|x|^2<\delta^2$ $\qquad$ $|y|^2<\delta^2$

Ahora:

$$\left|\frac{x^2+4xy^2+y^2}{x^2+y^2}-1\right|=\frac{|4xy^2|}{|x^2+y^2|}=\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2}\le\frac{4|x|(\cancel{x^2+y^2})}{\cancel{x^2+y^2}}=4|x|<4\delta=\varepsilon\ \to\ \delta=\frac{\varepsilon}{4}$$

Demostrado por definición.

Por tanto: $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=1$

ENTRETENIMIENTO 02

Calcule los siguientes límites si existen:

01. $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ donde la función es $f(x;y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; $\forall(x;y)\neq(0;0)$

02. $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ donde la función es $f(x;y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ Tome $S_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y=2x\}$ y $S_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y^3=x\}$ donde $(x;y)\neq(0;0)$

03. $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ donde la función es $f(x;y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ Tome $S_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y=x\}$ y $S_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y^2=x\}$

04. $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ donde la función es $f(x;y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ Tome $S_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y=x\}$ y $S_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y^2=x\}$

05. $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ donde la función es $f(x;y)=\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$ Tome $S_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y=x\}$ y $S_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y=x^2\}$

06. $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ donde la función es $f(x;y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ Tome $S_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y=0\}$ y $S_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ y=x\}$

07. Calcule si existe $\lim_{(x;y)\to(0;2)} \dfrac{y\,sen(x)}{x}$ Rpta: 2

08. Calcule si existe $\lim_{(x;y)\to(2;0)} \dfrac{x+\ln(1+xy)}{1+x+y}$ Rpta: 2/3

09. Calcule si existe $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x\,sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ Rpta: 0

10. Calcule si existe $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{e^{xy}-1}{x}$ Rpta: 0

11. Determine $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ Si existe, para $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ;(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & ;(x;y)=(0;0)\end{cases}$

12. Determine $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ Si existe, para $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^4+y^2} & ;(x;y)\neq(0;0)\\ 0 & ;(x;y)=(0;0)\end{cases}$

13. Calcule $\lim\limits_{(x;y)\to(1;1)} \dfrac{y^2+xy-2x^2}{y-x}$ Rpta: 3

14. Calcule $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;1)} \dfrac{x^4-2x^2y-x+y^2-y}{x^2+y^2-y+1}$ Rpta: 1

15. Calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{(x;y)\to(1;-1)} \dfrac{y(x^4+1)-2x^2y+x(x+1)^2(y+1)^2}{x^2y+xy^2+x+y}$ Rpta: 4

3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES:

3.1. Definición 1: Dado una función $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, es continua en el punto $\vec{x}_0$ si cumple las siguientes condiciones:

i) $f(\vec{x}_0)$ Existe

ii) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ Existe

iii) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)$

Nota: Si alguna de las condiciones de la definición no se cumple, entonces la función f no es continua en el punto $\vec{x}_0$.

También se dice que f es discontinua en el punto $\vec{x}_0$.

Propiedades: Si $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ son funciones continuas en el punto $\vec{x}_0$, entonces:

1) $f\pm g$ es continuas en el punto $\vec{x}_0$

2) $f.g$ es continuas en el punto $\vec{x}_0$

3) f/g es continuas en el punto $\vec{x}_0$, con $g(\vec{x}_0)\neq 0$

Ejemplo 4: Determine si la función: $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\ ;\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0\quad\ ;\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$ Es continua en $(0;0)$

Solución:

Por definición:

i) $f(0;0)=0$ Existe.

ii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ Existe

*) Consideramos $C_1:\ y=m\,x\ ;\ m\neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1+m^3)}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+m^3)}{(1+m^2)}=0$$

***)** Consideramos $C_2:\ y=k\,x^2\ ;\ k\neq 0$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+k^3x^6}{x^2+k^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1+k^3x^3)}{x^2(1+k^2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+k^3x^3)}{1+k^2x^2}=0$$

***)** Consideramos $C_3:\ x=k\,y^2$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{k^3y^6+y^3}{k^2y^4+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y^3(k^3y^3+1)}{y^2(k^2y^2+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{y(k^3y^3+1)}{k^2y^2+1}=0$$

Por tanto: 0 es candidato a límite

Por definición:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0\ \leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ \text{Tales que:}\quad 0<\|(x;y)-(0;0)\|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

Tenemos:

$$|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta\to|x|<\delta \qquad |y|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta\to|y|<\delta$$

$$|x|^2<\delta^2 \qquad |y|^2<\delta^2$$

Ahora:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{\left|(x+y)(x^2-xy+y^2)\right|}{x^2+y^2}\leq\frac{\left|(\cancel{x^2+y^2})(x^2-xy+y^2)\right|}{\cancel{x^2+y^2}}=\left|x^2-xy+y^2\right|$$

$$\leq|x|^2+|y|^2<\delta^2+\delta^2=2\delta^2$$

Ahora:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|<2\delta^2=\varepsilon\ \Rightarrow\ 2\delta^2=\varepsilon\ \Rightarrow\ \delta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

Demostrado por definición.

Por tanto: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}f(x;y)=0$ Existe

iii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = 0 = f(0;0)$

Por tanto: $f(x;y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ Es continua en $(0;0)$

ENTRETENIMIENTO 03

01. Determine si la función: $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & ;(x;y)\neq(0;0) \\ 0 & ;(x;y)=(0;0) \end{cases}$ Es continua en $(0;0)$

02. Sea $f(x;y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$

a) Determine $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ si es que existe.

b) Determine el o los puntos P donde f no es continua.

03. Determine si la función: $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{3x^4-3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ;(x;y)\neq(0;0) \\ 0 & ;(x;y)=(0;0) \end{cases}$ Es continua en $(0;0)$

04. Determine si la función: $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & ;(x;y)\neq(0;0) \\ 1 & ;(x;y)=(0;0) \end{cases}$ Es continua en $(0;0)$

05. Si $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y+y^2}{x^4+y^2}+x^2 & ;(x;y)\neq(0;0) \\ 0 & ;(x;y)=(0;0) \end{cases}$ Analizar si la función f es continua o no en el punto $(0;0)$

06. Determine la región de discontinuidad $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ;(x;y)\neq(0;0) \\ 1 & ;(x;y)=(0;0) \end{cases}$